Fonctions I

I- Présentation

Exercice 1

a) 9
b) 3
c) $5+2\sqrt{6}$
Erreur courante : 5
La somme « $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ » est à voir comme un seul « objet », que l'on souhaite élever au carré globalement. Or le carré ne se distribue pas sur une somme.
d) a^2
e) a^6
f) $9x^2$

Exercice 2

a) 10
b) -2
c) $\frac{6}{5}$
Erreur courante : 5
On cherche à prendre globalement l'inverse de la somme et non à prendre l'inverse de chaque « part » (nous appelons « parts » les termes d'une somme).
d) $\frac{1}{t}$
e) $\frac{t}{1+t}$
f) x^{37}

Exercice 3

a) 5
Erreur envisageable : 7
Question parfois posée : « doit-on appliquer la fonction à 16et à 9 séparément ? » Ben non : le signe plus n'est pas un simple « et » au sens de la langue courante (même s'il dérive probablement du signe « & ») ; il forme un seul terme à partir de deux termes. « $16+9$ » est un seul nombre ; cette expression représente déjà le résultat de l'addition.
b) $\sqrt{3}$
c) $\sqrt{\sqrt{3}}$
d) $\sqrt{x}$ (Il faut que x soit positif.)
e) $|x|$ C'est la *valeur absolue* de *x*. Voir le cours *Révisions d'Algèbre*, paragraphe *la valeur absolue*.
f) $\sqrt{x^2+y^2}$

Exercice 4

1- a) 121 b) $\left(\sqrt{2}+1\right)^2 = 3+2\sqrt{2}$ c) $(x+1)^2$ [On peut développer]

2- a) 101 b) 3 c) x^2+1

Exercice 5

1- a) 1 b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2x}$

2- a) 4 b) 1 c) $\frac{2}{x}$

Exercice 6

a) $2a+a^2$
Erreur possible : $3a+a^2$. Cette erreur provient d'une mauvaise compréhension du mot « associe », qui peut évoquer (mais à tort) l'idée de somme. Ainsi, certains croient qu'on « associe » le nombre de départ et « la somme de son double et de son carré » en les additionnant : $(a)\ +\ \left(2a+a^2\right)$

b) $2a\times a^2=2a^3$
c) *G* est la fonction qui, à tout nombre, associe le double de son cube.

Exercice 7

a) 22
b) $2(2x+1)$
c) $4x+2$
d) La fonction *F* quadruple le nombre, puis ajoute 2.

Exercice 8

$(n-1)(n+1)+1=n^2$
La fonction *F* élève au carré.

II- Notations

Exercice 9

a) 9
b) 11
c) 25
d) 13
e) $7+4\sqrt{3}$
f) 7
g) $5+2\sqrt{6}$
h) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
i) a^2+b^2
j) 81
k) 49
l) a^4
m) $(a+1)^4$
n) $(a^2+1)^2$
o) a^4+1

Exercice 10

a) 6
b) 10
c) 11
d) 12
e) 7
f) 20
g) $x+1$
h) $2x$
i) $2x+1$
j) $2(x+1)=2x+2$
k) $x+2$
l) $4x$

Exercice 11

a) 2
b) $4+3\sqrt{2}$
c) a^2+3a+2
d) x^2-x
e) x^4-2x^3+x

Exercice 12

a) $3-2\sqrt{2}$
b) $1-\sqrt{2}$
c) $\dfrac{a-1}{a}=1-\dfrac{1}{a}$
d) $\dfrac{1-x}{1+x}=-\dfrac{x-1}{x+1}=-u(x)$
e) $-\dfrac{1}{x}$

Exercice 13

a) $f:x\mapsto\dfrac{x^2+1}{2x}$
b) $g:x\mapsto 4x^6$

Exercice 14

a) $f:x\mapsto\dfrac{5}{2}x$
b) $g:x\mapsto\dfrac{1+x}{x^3}$

III- Ensemble de définition

Exercice 15

$$\begin{aligned}
D_f &= \mathbb{R}\setminus\{-1\} =]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[\\
D_g &= \mathbb{R}_+ = [0;+\infty[\\
D_h &= [-1;+\infty[\\
D_i &=]0;1[\cup]1;+\infty[
\end{aligned}$$

Exercice 16

Réponses non données.

IV- Antécédents

Exercice 17

a) 81
b) 3 et -3
c) 81
d) Il n'y en a pas.
e) 9
f) $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$
g) 2
h) $\sqrt{\sqrt{2}}$ et $-\sqrt{\sqrt{2}}$
i) 0

Exercice 18

Le mot « son », dans l'énoncé, est certes ambigu. Toutefois, le a) permet de lever cette ambiguïté : « son » faisait référence au nombre entré (l'« opérande ») et non à son carré.

a) $10^2 - 4\times 10 \;=\; 100-40 \;=\; 60$
b) $f : x \mapsto x^2 - 4x$
c) 0 et 4
d) 5 et -1

Exercice 19

a) $0\,;-1\,;1$
b) $0\,;\ \sqrt{2}\ ;\ -\sqrt{2}$

Exercice 20

a) $\{0;-2\}$
b) $\left\{-1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2}\right\}$
c) $\varnothing$

Exercice 21

a) $\mathbb{R}\setminus\{1\}$
b) $\dfrac{3}{2}$ (Il n'y a qu'un antécédent, le pluriel de la question n'est là que parce qu'il pourrait *a priori* y en avoir plusieurs.)
c) $1+\sqrt{2}$ et $1-\sqrt{2}$

Exercice 22

a) $\mathbb{R}^*$
b) $\varnothing$
c) $\{1\}$

Exercice 23

a) $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$
b) $\sqrt{2}$
c) $\left\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\right\}$

V- Fonctions particulières

Exercice 24

$f : x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$	$a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{2}$	
$g : x \mapsto 0{,}1x + 0$	$a = 0{,}1$; $b = 0$	fonction linéaire
$h : x \mapsto 1{,}1x + 0$	$a = 1{,}1$; $b = 0$	fonction linéaire
$i : x \mapsto 1x + \frac{1}{3}$	$a = 1$; $b = \frac{1}{3}$	
$Id : x \mapsto 1x + 0$	$a = 1$; $b = 0$	fonction linéaire
$j : x \mapsto 0x + 2$	$a = 0$; $b = 2$	
$k : x \mapsto -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$	$a = -\frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{2}$	
$N : x \mapsto 0x + 0$	$a = 0$; $b = 0$	fonction linéaire

Exercice 25

On trouve que $f : x \mapsto -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$, ce qui donne, $f(0) = \frac{5}{2}$

Exercice 26

On trouve que $g : x \mapsto -\frac{3}{2}x$

Exercice 27

On trouve que $g : x \mapsto -x-1$

Donc $g\big(g(0)\big) \;=\; g(-1) \;=\; -(-1)-1 \;=\; 1-1 \;=\; \boxed{0}$

Exercice 28

$h : x \mapsto -\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}$

Exercice 29

Il y a deux fonctions possibles :
$f : x \mapsto \sqrt{2}x + \sqrt{2} - 1$ ou $f : x \mapsto -\sqrt{2}x - \sqrt{2} - 1$
On en déduit qu'il y a deux valeurs possibles pour $f(1)$:
$\boxed{2\sqrt{2} - 1}$ et $\boxed{-2\sqrt{2} - 1}$

VI- Fonctions paires et impaires

Exercice 30

a) La fonction inverse est impaire
b) f est paire
c) g est impaire
d) h n'est ni paire ni impaire
e) u n'est ni paire ni impaire

Bien entendu, chacune de ces réponses doit être démontrée.

Exercice 31

a) La fonction f n'est ni paire ni impaire.
b) La fonction g est paire.
c) La fonction h est impaire.
d) La fonction j n'est ni paire ni impaire car son ensemble de définition n'est pas « symétrique par rapport à 0 » (sinon, elle n'est pas loin d'être paire).

VII- Synthèse

Exercice 32

a) $\mathbb{R}$
b) 3
c) 1
d) 0 et 2
e) $\{-1;3\}$
f) 0 et 3
g) $g : x \mapsto x^2$
h) $h : x \mapsto x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x$

Exercice 33

a) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$
b) $\frac{3}{2}\sqrt{2} + 1$
c) $\left\{\frac{5}{4}\right\}$
d) $\frac{5x - 4}{-4x + 5}$
e) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$
f) $\{-1;1\}$
g) Voir corrigé. [Il s'agit de prouver que, pour tout y (différent de -2), l'équation d'inconnue x : $f(x) = y$ admet une unique solution.]

VIII- Exercices supplémentaires

Exercice 34

a) $\frac{3}{2}$
b) -1
c) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x} - x$
d) 1 et -1
e) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;0;1\}$; $F(F(x)) = \boxed{\frac{1}{\frac{1}{x} - x} - \left(\frac{1}{x} - x\right)}$

Exercice 35

a) $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$
b) $\sqrt{13}$
c) 11
d) -5 n'a pas d'antécédent, par f.
e) 3 (mais pas -1)